# 成都石室中学 2025-2026 学年度上期高 2026 届一诊模拟

## 数学试题

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

**注意事项：**

**1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.**

**2.作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效.**

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1．已知集合 $A=\{x|\ x^2-x-2<0\}$，　$B=\{x\mid \log_2(x+2)\geq 0\}$，则 $A\cap B=$

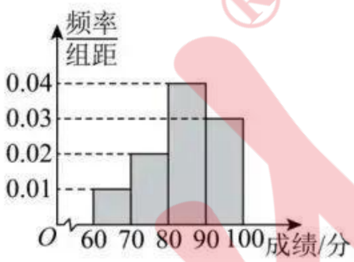
A．$\{x|-1<x<2\}$　　B．$\{x|-1\leq x<2\}$

C．$\{x|\ x<2\}$　　D．$\{x|\ x\geq -1\}$

【答案】A

【详解】已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$　，$B=\{x|\ x\geq -1\}$，则 $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$.故选：A.

2．某校高三年级 1000 名学生参加体育健康标准测试，从中随机抽取部分学生的成绩（规定满分为 100 分），得到如图频率分布直方图，则估计该次考试成绩在区间 $[90,100)$ 内的学生人数为




A．100　　B．200　　C．300　　D．400

【答案】C

【详解】根据题意，成绩在 $[90,100)$ 区间的频率为 $0.03\times 10=0.3$，

则估计成绩在 $[90,100)$ 区间的人数为：$0.3\times 1000=300$ 人．故选：C.

3．已知 $O$ 为坐标原点，$F$ 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，$P$ 为 $C$ 上一点，若 $\angle PFO=\dfrac{\pi}{2}$，则 $|PF|=$

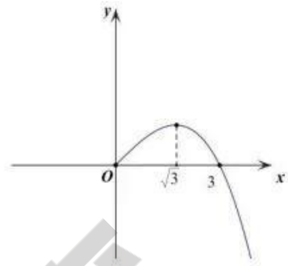
A．8　　B．6　　C．4　　D．2

【答案】C

【详解】抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$，又 $P$ 为 $C$ 上一点，$\angle PFO=\dfrac{\pi}{2}$，故 $P$ 的坐标为 $(2,4)$ 或 $(2,-4)$，

所以$|PF|=4$.故选：C.

4.已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上的图象如图所示，则不等式$(x-\sqrt{3})f(x)>0$的解集为




A. $(-3,0)\cup(\sqrt{3},3)$　　　B. $(-3,0)\cup(0,3)$

C. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$　　　D. $(-\infty,-3)\cup(\sqrt{3},3)$

【答案】A

【详解】因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，结合图象可知当$x\in(-\infty,-3)\cup(0,3)$时，$f(x)>0$，

当$x\in(-3,0)\cup(3,+\infty)$时，$f(x)<0$，由不等式$(x-\sqrt{3})f(x)>0$，可得：$\begin{cases}x-\sqrt{3}>0\\f(x)>0\end{cases}$或者$\begin{cases}x-\sqrt{3}<0\\f(x)<0\end{cases}$，

解得$x\in(-3,0)\cup(\sqrt{3},3)$.故选：A.

5.将正弦曲线上所有的点横坐标变为原来的2倍，再向左平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度，得到函数$f(x)$的图象，则函数$y=f(x),x\in[-2\pi,2\pi]$的单调增区间为

A. $\left[-2\pi,-\frac{5\pi}{3}\right],\left[\frac{\pi}{3},2\pi\right]$　　　B. $\left[-\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$

C. $\left[-2\pi,-\frac{\pi}{3}\right],\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$　　　D. $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$

【答案】B

【详解】由题可知$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，当$x\in[-2\pi,2\pi]$时，$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，因为$y=\sin z$，$z\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$的单调递增区间是$z\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，解$-\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}$，得$-\frac{5\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$，所以函数$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in[-2\pi,2\pi]$的单调增区间为$\left[-\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.故选：B.

6.在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CE}=\mathbf{0}$，$F$是线段$DE$的中点，连结$BD$交$AF$于$O$，若$\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AF}$，则$m=$

A. 1　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【详解】连结 $AE$，因为 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})$，　$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AF}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}m\overrightarrow{AD}$

因为 $B,O,D$ 三点共线，所以 $\frac{1}{2}m+\frac{5}{6}m=1$，所以 $m=\frac{3}{4}$.故选：B.

7. 三个相同的盒子里分别放有两个黑球，一个黑球一个红球，两个红球，现从任意的盒子里随机取出一球，若该球为红色，则该盒剩下的另一球是也是红色的概率为

$\frac{1}{6}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【详解】设从任意盒子里取出一球是红球为事件 $A$，该盒剩下的一球是红球为事件 $B$，则 $P(AB)=\frac{1}{3}$，

$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，所以该盒剩下的另一球是也是红球的概率为

$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{3}$，故选：D.

8. 设 $a>0$，若存在 $x>0$ 使得不等式 $ae^x+1-x\le\frac{1}{x}\ln\frac{x}{a}$ 成立，则实数 $a$ 的取值范围为

A. $(0,1]$　B. $[e,+\infty)$　C. $\left(0,\frac{1}{e}\right]$　D. $(0,e]$

【答案】C

【详解】当 $a>0$ 时，$x>0$，原式等价于 $axe^x+x+\ln\frac{a}{x}\le x^2$

$\Leftrightarrow axe^x+x+\ln\frac{a}{x}+\ln x^2\le x^2+\ln x^2\Leftrightarrow e^{x+\ln(ax)}+[x+\ln(ax)]\le x^2+\ln x^2$，

$\because y=x+\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 的增函数，$\therefore e^{x+\ln(ax)}\le x^2$，即 $axe^x\le x^2\Leftrightarrow a\le\frac{x}{e^x}$，

由题意，只需 $a\le\left(\frac{x}{e^x}\right)_{\max}$，记 $h(x)=\frac{x}{e^x},h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

当 $x>1,h'(x)<0,h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，$0<x<1,h'(x)>0,h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

故 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{e}$，所以 $0<a\le\frac{1}{e}$，故选：C.

**二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.**

9.已知在$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^n$的展开式中，第 3 项的二项式系数与第 5 项的二项式系数相等，则下列说法正确的有

A. $n=6$　　　　B. 第 4 项的二项式系数最大

C. $x^2$的系数为$60$　　　　D. 展开式各项系数之和为$64$

【答案】ABC

【详解】由题设$C_n^2=C_n^4$，可得$n=6$，A 正确；

展开式共有 7 项，故只有第 4 项的二项式系数最大，B 正确；

展开式通项为$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(\dfrac{2}{x})^r=2^r C_6^r x^{6-2r}$，$r=0,1,\cdots,6$，令$6-2r=2$，可得$r=2$，则$x^2$的系数为$4C_6^2=60$，C 正确；

令$x=1$，得$\left(1+\dfrac{2}{1}\right)^6=3^6$，D 错；故选：ABC.

10.设函数$f(x)=x^3-3ax+1$，则（　）

A. 当$a=1$时，$x=1$是$f(x)$的极小值点

B. 当$a>0$时，函数$f(x)$有三个零点

C. 若函数$f(x)$有三个零点$x_1,x_2,x_3$，则$x_1x_2x_3=1$

D. 已知$x=x_0$是函数$f(x)$的极大值点，若$f(x_0)=f(t)$，$x_0\neq t$，则$t=2\sqrt{a}$

【答案】AD

【详解】当$a=1$时，$f(x)=x^3-3x+1$，$f'(x)=3x^2-3$，令$f'(x)>0$，得$x<-1$或$x>1$，故$f(x)$在$(-\infty,-1),(1,+\infty)$单调递增，在$(-1,1)$单调递减，所以$x=1$是$f(x)$的极小值点，A 正确；

对于选项 B，$f'(x)=3x^2-3a$，当$a>0$时，$f(x)$在$\left(-\infty,-\sqrt{a}\right),\left(\sqrt{a},+\infty\right)$单调递增，在$\left(-\sqrt{a},\sqrt{a}\right)$单调递减，注意到$f(0)=1$，所以要使函数$f(x)$有三个零点，只需$f(\sqrt{a})<0$，即$a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+1<0$，解得$a^3>\dfrac{1}{4}$，所以，当$0<a^3\le\dfrac{1}{4}$时，函数$f(x)$没有三个零点，B 错误；

对于选项 C，若函数$f(x)$有三个零点$x_1,x_2,x_3$，则$f(x)=x^3-3ax+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，展开对比系数可得$x_1x_2x_3=-1$，C 错误；

对于选项 D，由选项 B 的探讨可知 $x_0=-\sqrt{a}$，由 $f(-\sqrt{a})=f(t)$，得 $-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}+1=t^3-3at+1$，

即 $(t^3+a\sqrt{a})-3a(t+\sqrt{a})=0$，即 $(t-2\sqrt{a})(t+\sqrt{a})^2=0$，因为 $t\neq-\sqrt{a}$，所以 $t=2\sqrt{a}$，D 正确；

故选：AD.

11．已知点 $P$ 为双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 右支上一点，$F_1,F_2$ 分别为其左、右焦点，$l_1$，$l_2$ 为双曲线 $C$ 的两条渐近线，过点 $P$ 分别作 $PA\perp l_1$，$PB\perp l_2$，垂足依次为 $A,B$，过点 $P$ 作 $PM\mathbin{/\mkern-5mu/}l_2$ 交 $l_1$ 于点 $M$，过点 $P$ 作 $PN\mathbin{/\mkern-5mu/}l_1$ 交 $l_2$ 于点 $N,O$ 为坐标原点，则下列结论正确的是（　）

A. $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的最大值为3　　　　B. $\Delta F_1PF_2$ 的内心 $I$ 到 $y$ 轴的距离为1

C. $|PM|\cdot|PN|=\frac{3}{4}$　　　　D. $|MN|\geq\sqrt{3}$

【答案】ABD

【详解】A 选项：由双曲线的定义知：$|PF_1|-|PF_2|=2$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|PF_2|+2}{|PF_2|}=1+\frac{2}{|PF_2|}$

令 $|PF_2|=t$，则 $t\in[1,+\infty)$，所以 $1+\frac{2}{|PF_2|}=1+\frac{2}{t}\leq3$，所以 A 正确；

B 选项：设三角形内切圆与 $PF_1,PF_2,F_1F_2$ 的切点分别为 $D,E,F$，由几何关系可得 $|PE|=|PD|$，$|F_1E|=|F_1F|$，

$|F_2D|=|F_2F|$，所以 $|PF_1|-|PF_2|=|F_1F|-|F_2F|=2a=2$，又 $|F_1F|+|F_2F|=2c=4$，

所以 $|F_1F|=3$，$|F_2F|=1$，所以 $F(1,0)$，即点 $P$ 在双曲线右支上时，焦点三角形内切圆与 $x$ 轴切于右顶点.

又因为 $IF\perp x$ 轴，所以 $I$ 到 $y$ 轴的距离为 1，所以 B 正确；

C 选项：设点 $P(m,n)$，则 $3m^2-n^2=3$，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，即 $\sqrt{3}x\pm y=0$，

所以 $|PA|\cdot|PB|=\frac{|\sqrt{3}m-n|}{2}\cdot\frac{|\sqrt{3}m+n|}{2}=\frac{|3m^2-n^2|}{4}=\frac{3}{4}$，

因为双曲线 $C$ 的两条渐近线的斜率分别为 $-\sqrt{3},\sqrt{3}$，所以 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$，因为 $PM\mathbin{/\mkern-5mu/}l_2$，则 $\angle PMA=\frac{\pi}{3}$，

因为 $PA\perp OA$，则 $|PM|=\frac{|PA|}{\sin\frac{\pi}{3}}$，同理 $|PN|=\frac{|PB|}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

所以 $|PM|\cdot|PN|=\frac{|PA|}{\sin\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{|PB|}{\sin\frac{\pi}{3}}=1$，故 C 错误；

D 选项：由 C 选项可知 $|PM|\cdot|PN|=1$，且 $\angle MPN=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理可得 $|MN|^2=|PM|^2+|PN|^2-2|PM|\cdot|PN|\cdot\cos\angle MPN=|PM|^2+|PN|^2+1\geq 2|PM|\cdot|PN|+1=3$，

$|MN|\geq\sqrt{3}$，当且仅当 $|PM|=|PN|=1$ 时，等号成立，故 D 正确.

故选：ABD.

**三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12.欧拉是 18 世纪最伟大的数学家之一，在很多领域中都有杰出的贡献.人们把欧拉恒等式“$e^{i\pi}+1=0$”与麦克斯韦方程组并称为“史上最伟大的公式”.其中，欧拉恒等式是欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 的一种特殊情况.若复数 $z=e^{i\pi}+\frac{1}{1-i}$，则 $|z|=$______.

【答案】$|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

【详解】由 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，得 $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，$z=-1+\frac{1}{1-i}=-1+\frac{1+i}{2}=\frac{i-1}{2}$，

所以 $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. 已知 $a,b,c$ 分别为 $\Delta ABC$ 三个内角 $A,B,C$ 的对边，若 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$，则 $A=$______.

【答案】$\frac{\pi}{3}$

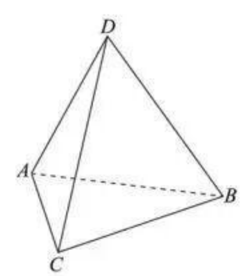
【详解】因为 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$，由正弦定理得

$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$，又因为 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$，因为 $\sin C>0$，所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A-1=0$，即

$2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

14. 如图，已知正四面体 $D-ABC$ 顶点处有一质点 $Q$，点 $Q$ 每次会随机地沿一条棱向相邻的某个顶点移动，且向每个顶点移动的概率相同，从一个顶点沿一条棱移动到相邻顶点称为移动一次，若质点 $Q$ 的初始位置位于点 $A$ 处，记点 $Q$ 移动 $n$ 次后仍在底面 $ABC$ 上的概率为 $P_n$.则 $P_2=$______；满足 $P_n-\frac{3}{4}>\frac{1}{2025}$ 的 $n$ 的最大值为______.



【答案】$P_2=\frac{7}{9}$；4

【详解】（1）依题意，每一个顶点有3个相邻的顶点，其中两个在同一底面.

所以当点$Q$在下底面时，随机移动一次仍在下底面的概率为$\frac{2}{3}$，所以$P_1=\frac{2}{3}$，

在上顶点$D$时，随机移动一次回到下底面的概率为1，$P_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times1=\frac{7}{9}$.

（2）因为$P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\left(1-P_n\right)=-\frac{1}{3}P_n+1$，所以$P_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}P_n+1-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}P_n+\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_n-\frac{3}{4}\right)$.

又因为$P_1=\frac{2}{3}$，所以$P_1-\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}\neq0$，所以数列$\left\{P_n-\frac{3}{4}\right\}$是首项为$-\frac{1}{12}$，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列.

因为$P_n-\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$，

若$P_n-\frac{3}{4}>\frac{1}{2025}$，则$\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}>\frac{1}{2025}$，即$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}>\frac{4}{2025}$.

$\because\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{1}{81}>\frac{4}{2025},\left(-\frac{1}{3}\right)^{5}<0$，$\left(-\frac{1}{3}\right)^{6}=\frac{1}{729}<\frac{4}{2025}$，$\therefore n$的最大值为4.

故答案为：$\frac{7}{9}$；4.

**四、解答题：本大题共5小题，共77分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.（本小题13分）已知椭圆$C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右顶点为$(5,0)$，离心率为$\frac{4}{5}$,左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$,$P$为椭圆$C$上不同于左、右顶点的任意一点

(1)求椭圆$C$的方程；

(2)求$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的取值范围.

【详解】（1）依题意$\begin{cases}a=5\\e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}\end{cases}$，所以$\begin{cases}a=5\\c=4\end{cases}$，则$b=\sqrt{a^2-c^2}=3$，　　…………3分

所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.　　…………5分

(2)设$P\left(x_0,y_0\right)$，$-5<x_0<5$，$F_1(-4,0)$、$F_2(4,0)$，

则$\overrightarrow{PF_1}=\left(-x_0-4,-y_0\right)$，$\overrightarrow{PF_2}=\left(-x_0+4,-y_0\right)$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x_0^2+y_0^2-16$.　　…………8分

因为$\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$，所以$y_0^2=9-\frac{9x_0^2}{25}$，所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{16x_0^2}{25}-7\geq -7$，　　…………10 分

又$x_0^2<25$，所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{16x_0^2}{25}-7<16-7=9$，　　…………12 分

所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的取值范围为$[-7,9)$.　　…………13 分

16.（本小题满分 15 分）某校举办校刊义卖活动，学生在义卖处每领取一本校刊，便自觉向收银箱中支付至少两元钱.现统计了连续 5 天的售出校刊数量和收益情况，如下表：

| 售出校刊数量 $x$（单位：箱） | 6 | 5 | 7 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 收益 $y$（单位：元） | 240 | 220 | 260 | 230 | 270 |

(1) 求收益 $y$ 关于售出数量 $x$ 的回归直线方程，并计算售出 8 箱校刊时的预计收益；

(2)学校决定将收益奖励在科技创新大赛中获奖的学生，获奖学生每人奖励 100 元.已知甲、乙两名学生是否获奖是相互独立的，甲获奖的概率为$\frac{2}{3}$，乙获奖的概率为$\frac{1}{2}$，求甲、乙两名学生获奖总金额 $X$ 的分布列及数学期望.

附：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

【详解】(1) 依题意可得$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{7400-5\times6\times244}{184-5\times6^2}=20$，　　…………2 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=244-20\times6=124$，所以回归直线方程为$\hat{y}=20x+124$，　　…………4 分

当$x=8$时，$\hat{y}=20\times8+124=284$（元），

即售出 8 箱校刊时的预计收益是 284 元.　　…………6 分

(2) 获奖总金额 $X$ 的值为$0,100,200$，　　…………8 分

记甲获奖为事件 $A$，乙获奖为事件 $B$，根据题意可得$P(A)=\frac{2}{3},P(B)=\frac{1}{2}$，

所以$P(X=0)=P(\overline{A})P(\overline{B})=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$，　　…………10 分

$P(X=100)=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，　　…………12 分

$P(X=200)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，　　…………14 分

所以总金额 X 的分布列为：

| $X$ | 0 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

所以$E(X)=0\times\frac{1}{6}+100\times\frac{1}{2}+200\times\frac{1}{3}=\frac{350}{3}$（元）.　　…………15 分

17.（本小题 15 分）已知正项数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$2a_nS_n=a_n^2+1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=S_n^2$，证明：$\frac{1}{b_1b_3}+\frac{1}{b_2b_4}+\frac{1}{b_3b_5}+\frac{1}{b_4b_6}+\cdots+\frac{1}{b_{n-1}b_{n+1}}+\frac{1}{b_nb_{n+2}}<\frac{3}{4}$.

【详解】（1）当$n=1$时，$2a_1S_1=a_1^2+1\Rightarrow 2a_1^2=a_1^2+1$，由于$a_n>0$，解得$a_1=1$；　　…………1 分

当$n\geq 2$时，$2(S_n-S_{n-1})S_n=(S_n-S_{n-1})^2+1$，整理得$S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geq 2)$，

所以数列$\{S_n^2\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列. 所以$S_n^2=S_1^2+(n-1)\times 1=n$.　　…………4 分

又由$\{a_n\}$为正项数列，故$S_n=\sqrt{n}(n\in\mathbf{N}^*)$　　…………5 分

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$　　…………7 分

当$n=1$，$a_1=1$也满足上式，$\therefore a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$　　…………8 分

（2）证明：由（1）可得$b_n=S_n^2=n$，$\frac{1}{b_nb_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，　　…………10 分

所以$\frac{1}{b_1b_3}+\frac{1}{b_2b_4}+\frac{1}{b_3b_5}+\frac{1}{b_4b_6}+\cdots+\frac{1}{b_{n-1}b_{n+1}}+\frac{1}{b_nb_{n+2}}$

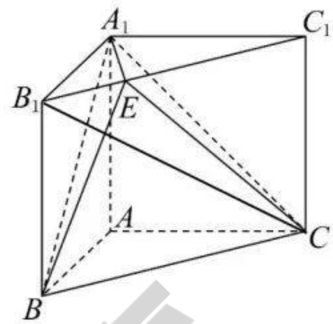
$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$　　…………13 分

因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，

因此$\frac{1}{b_1b_3}+\frac{1}{b_2b_4}+\frac{1}{b_3b_5}+\frac{1}{b_4b_6}+\cdots+\frac{1}{b_{n-1}b_{n+1}}+\frac{1}{b_nb_{n+2}}<\frac{3}{4}$.　　…………15 分

18.（本小题 17 分）如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC=\sqrt{2}$，$AB=AC=CC_1=1$，点 $E$ 是线段 $B_1C_1$ 上的动点（不与点 $B_1,C_1$ 重合）.




(1)求证：$A_1B\perp B_1C$

(2)若平面 $EA_1B$ 与平面 $A_1BB_1$ 所成角的正弦值不小于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求线段 $B_1E$ 的取值范围.

(3)设点 $E$ 到面 $A_1BC$ 的距离为 $h$，四面体 $EA_1BC$ 的外接球半径为 $R$，求 $\frac{h}{R}$ 的取值范围.

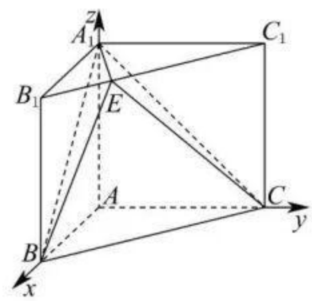
【详解】（1）连结 $AB_1$，$\because AB=AC=1, BC=\sqrt{2}$，所以 $AB\perp AC$，

所以在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，易得 $AC\perp$ 面$ABA_1$，所以 $AC\perp BA_1$，

又因为 $AB_1\perp BA_1$，$AB_1\cap AC=A$，所以 $A_1B\perp$ 面$AB_1C$，所以 $A_1B\perp B_1C$，　…………4 分

（2）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AA_1\perp AC$，$AA_1\perp AB$，

则以 $A$ 为原点，以 $AB$ 为 $x$ 轴，$AC$ 为 $y$ 轴，$AA_1$ 为 $z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，




则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，

设 $\overrightarrow{B_1E}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}=\lambda(-1,1,0)$，则 $E(1-\lambda,\lambda,1)$，

则 $\overrightarrow{A_1E}=(1-\lambda,\lambda,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$，　…………5 分

设平面 $A_1EB$ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=(1-\lambda)x+\lambda y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=x-z=0\end{cases}$，取 $z=1$，则 $x=1$，$y=\frac{\lambda-1}{\lambda}$，故 $\vec{m}=\left(1,\frac{\lambda-1}{\lambda},1\right)$，

又在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，则 $AC\perp$ 平面 $A_1BB_1$，

所以平面 $A_1BB_1$ 的法向量可取 $\vec{n}=\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$，　…………7 分

平面 $EA_1B$ 与平面 $A_1BB_1$ 所成角余弦值为 $\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\left|\frac{\frac{\lambda-1}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2+2}}\right|\le\frac{\sqrt{6}}{3}$

令 $\frac{\lambda-1}{\lambda}=t$，因为 $\lambda\in(0,1)$，则 $t<0$，故 $\frac{|t|}{\sqrt{t^2+2}}\le\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即 $t^2\le4$，则 $-2\le t<0$，即 $\frac{\lambda-1}{\lambda}\ge-2$，故 $\lambda\ge\frac{1}{3}$，所以 $\lambda\in\left[\frac{1}{3},1\right)$ …………9 分

所以 $B_1E=\lambda B_1C_1\in\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{2}\right)$ …………10 分

（3）记点 $A_1$ 到平面 $EBC$ 的距离 $d$，根据题意，$V_{E-A_1BC}=V_{A_1-EBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta EBC}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1BC}\cdot h$

又 $S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}\times BC\times CC_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 $A_1$ 到平面 $EBC$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$， …………11 分

设四面体 $EA_1BC$ 的外接球心 $I$ 的坐标为 $(x,y,z)$，半径为 $R$，

则 $R=IA_1=IB=IC=IE$，

故 $\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}$， …………13 分

则 $x=y=z$，所以外接球心 $I$ 的坐标为 $(x,x,x)$，

代入得 $R=\sqrt{3x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1+\lambda)^2+(x-\lambda)^2+(x-1)^2}$，

即 $3x^2-2x+1=3x^2-4x+2\lambda^2-2\lambda+2$，

则 $x=\lambda^2-\lambda+\frac{1}{2},\lambda\in(0,1)$，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$x$ 取得最小值为 $\frac{1}{4}$，

当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 时，$\lambda^2-\lambda+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$， …………15 分

所以 $R^2=3x^2-2x+1,x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$R^2$ 取得最小值为 $\frac{2}{3}$，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$3x^2-2x+1=\frac{3}{4}$，所以 $R^2\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)$，所以 $R\in\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，因为 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\frac{h}{R}$的取值范围为$\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. …………17 分

19.（本小题满分 17 分）

已知$f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}-a\ln x-ax$，其中$a\in(0,+\infty)$, $g\left(x\right)=2\cos x+\sin 2x$.

(1)当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

(2)求$g\left(x\right)$的最值；

(3)若对任意$x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，不等式$f\left(x_1\right)\geq\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2\cdot g\left(x_2\right)$恒成立，求实数$a$的取值范围.

【详解】(1)当$a=1$时，$f\left(x\right)=xe^{x}-\ln x-x$，$f'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{x}-\frac{1}{x}-1, f\left(1\right)=e-1, f'\left(1\right)=2e-2$,

$\therefore$曲线$y=f\left(x\right)$在$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为: $y-\left(e-1\right)=\left(2e-2\right)\left(x-1\right)$, 即: $y=\left(2e-2\right)x-\left(e-1\right)$.

…………4 分

(2) $\because g\left(x+2\pi\right)=g\left(x\right)$恒成立, $\therefore 2\pi$是$g\left(x\right)$的一个周期,

故可取$g\left(x\right)=2\cos x+\sin 2x$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$,

$g'\left(x\right)=-2\sin x+2\cos 2x=2\left(-2\sin^2 x-\sin x+1\right)=2\left(\sin x+1\right)\left(-2\sin x+1\right)$ …………6 分

令$g'\left(x\right)<0$，得$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$g'\left(x\right)>0$, 得$x\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$.

$\therefore g\left(x\right)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$单调递减，在$\left(\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$单调递增. …………8 分

则$g\left(x\right)_{\min}=g\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$g\left(x\right)_{\max}=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. …………10 分

(3)由题知: $f\left(x\right)_{\min}\geq\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2\cdot\left[g\left(x\right)\right]_{\max}$

又由(2)知: $g(x)_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,$\therefore f(x)_{\min}\geq\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=a^{2}$, …………12 分

即: $xe^{x}-a\ln x-ax-a^{2}\geq 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立

设 $h(x)=xe^{x}-a\ln x-ax-a^{2}$, $x\in(0,+\infty)$

求导得: $h'(x)=(x+1)e^{x}-\dfrac{a}{x}-a=(x+1)\left(e^{x}-\dfrac{a}{x}\right)$ …………13 分

设 $\varphi(x)=e^{x}-\dfrac{a}{x}$，易知 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x\to 0^{+}$ 时, $g(x)\to-\infty$ ;又 $g(a)=e^{a}-1>0$, 故存在 $x_0\in(0,a)$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $e^{x_0}=\dfrac{a}{x_0}$.

因此, $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,

则 $h(x)\geq h(x_0)=x_0e^{x_0}-a\ln x_0-ax_0-a^{2}$ …………14 分

将 $e^{x_0}=\dfrac{a}{x_0}$ (即 $x_0e^{x_0}=a,\ln x_0=\ln a-x_0$) 代入得:

$h(x_0)=a-a(\ln a-x_0)-ax_0-a^{2}=a-a\ln a-a^{2}$,

要求 $h(x)\geq 0$，需 $a-a\ln a-a^{2}\geq 0$，即 $1-\ln a-a\geq 0$. …………16 分

设 $H(a)=1-\ln a-a$，易知 $H(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $H(1)=0$，故 $H(a)\geq 0$ 的解为 $a\in(0,1]$.

…………17 分